ZAGADNIENIA NA EGZAMIN MAGISTERSKI (II STOPIEŃ)
dla studentów kierunku matematyka
obowiązujące począwszy od roku akademickiego 2022-23

Omówienie zagadnienia powinno zawierać:
(a) sformułowanie podstawowych definicji i twierdzeń, które go dotyczą,
(b) przykłady ilustrujące występujące pojęcia (pozytywne i negatywne),
(c) logiczne powiązania pomiędzy odpowiednimi pojęciami i twierdzeniami,
(d) ewentualne zastosowania zagadnienia w innych dziedzinach matematyki lub w innych dziedzinach wiedzy.

Teoria miary i całki

1. Sigma-ciała zbiorów; zbiory borelowskie.
2. Miara zewnętrzna Lebesque'a i miara Lebesgue'a. Zbiory mierzalne i niemierzalne względem miary Lebesgue'a. Zbiory miary zero.
3. Funkcje mierzalne i ich własności.
4. Całka Lebesgue'a i jej związek z całką Riemanna.
5. Twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki.

Analiza zespolona

1. Różniczkowalność i holomorficzność funkcji, równania Cauchy'ego-Riemanna.
2. Twierdzenie całkowe Cauchy'ego, uogólnienia i wnioski z twierdzenia.
3. Miejsca zerowe i a-punkty funkcji holomorficznej. Twierdzenia o miejscach zerowych.
4. Funkcje holomorficzne a szeregi potęgowe. Podstawowe twierdzenia.
5. Punkty osobliwe odosobnione funkcji holomorficznych, klasyfikacja. Szereg Laurenta, zachowanie funkcji w sąsiedztwie osobliwości.
6. Funkcje całkowite i meromorficzne, klasyfikacja. Twierdzenia o funkcjach całkowitych i o funkcjach meromorficznych.

Analiza funkcjonalna

1. Przestrzenie Banacha: definicja i przykłady.
2. Ciągłość operatora. Norma operatora. Przestrzeń unormowana operatorów liniowych i ograniczonych.
3. Przestrzeń Hilberta. Nierówność Cauchy'ego-Schwarza. Bazy ortogonalne.
4. Twierdzenia Banacha o odwzorowaniu otwartym, o odwzorowaniu odwrotnym i o wykresie domkniętym.
5. Funkcjonały liniowe ciągłe, twierdzenie Hahna-Banacha, przestrzeń sprzężona.
6. Twierdzenie Banacha o punkcie stałym dla odwzorowań zwężających.

Algebra

1. Pierścień ułamków. Pierścień lokalny. Ciało ułamków.
2. Pierścień wielomianów. Wielomiany nierozkładalne. Ciało algebraicznie domknięte.
3. Dziedzina całkowitości. Dziedzina noetherowska, ideałów głównych, z jednoznacznością rozkładu, euklidesowa.
4. Liczby algebraiczne i przestępne. Twierdzenie Liouville'a. Algebraiczna niezależność.
5. Ciała i ich rozszerzenia, stopień rozszerzenia, typy rozszerzeń. Wielomian minimalny elementu algebraicznego.
6. Zanurzenia ciał. Twierdzenie Dirichleta o jednościach. Jedności w ciałach kwadratowych.
7. Elementy algebraiczne całkowite. Baza całkowita. Wyróżnik ciała.
8. Ideał ułamkowy. Dziedzina Dedekinda. Grupa klas ideałów i liczba klas ideałów.

Topologia

1. Przestrzenie metryczne. Topologia w przestrzeniach metrycznych.
2. Zbiory otwarte i domknięte. Wnętrze, brzeg, domknięcie i pochodna zbioru w przestrzeni metrycznej i w przestrzeni topologicznej.
3. Zbieżność w przestrzeni metrycznej i w przestrzeni topologicznej.
4. Ogólne przestrzenie topologiczne, rodziny otoczeń, bazy topologii.
5. Odwzorowania ciągłe przestrzeni metrycznych i topologicznych. Homeomorfizmy i przestrzenie homeomorficzne.
6. Przestrzenie zwarte. Zwartość w przestrzeniach euklidesowych. Odwzorowania ciągłe na przestrzeniach zwartych.

Procesy stochastyczne i statystyka

1. Najważniejsze rozkłady w rachunku prawdopodobieństwa i statystyce.
2. Podstawowe pojęcia statystyki matematycznej (cecha, próba, próbka, statystyka – funkcja próby).
3. Zagadnienie estymacji. Estymacja punktowa i przedziałowa parametrów cechy. Estymator i przedział ufności.
4. Estymatory i ich klasyfikacja. Estymacja punktowa wartości oczekiwanej, wariancji i wskaźnika struktury.
5. Weryfikacja hipotez statystycznych. Ogólna budowa testu statystycznego.
6. Budowa parametrycznego testu istotności.
7. Główne założenia i idee Metody Monte Carlo. Wykorzystanie tej metody do obliczania pól figur i całek oznaczonych.

Teoria liczb

1. Postulat Bertranda. Twierdzenie o liczbach pierwszych. Twierdzenie Zhanga. Hipotezy.
2. Uogólnienia twierdzeń Eulera i Wilsona.
3. Kongruencje modulo ideał. Działania na ideałach. Chińskie twierdzenie o resztach.
4. Pierwiastki pierwotne modulo n. Hipoteza Artina. Logarytm dyskretny.
5. Równanie Pella i jego uogólnienia.
6. Funkcja dzeta Riemanna. Iloczyn eulerowski. Hipoteza Riemanna.

Równania różniczkowe

1. Pojęcie równania różniczkowego zwyczajnego oraz jego rozwiązania, interpretacja geometryczna. Podstawowe przykłady równań różniczkowych zwyczajnych.
2. Twierdzenia Peano i Picarda-Lindelofa o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań problemu Cauchy'ego.
3. Układy równań różniczkowych liniowych.
4. Liniowe równania różniczkowe cząstkowe. Równanie Laplace'a. Równanie przewodnictwa cieplnego. Równanie falowe. Podstawowe własności rozwiązań.
5. Nieliniowe równania różniczkowe cząstkowe. Nieliniowe równanie Poissona. Równanie Hamiltona-Jacobiego. Podstawowe własności rozwiązań.