

ZAGADNIENIA NA EGZAMIN LICENCJACKI (I STOPIEŃ)
dla studentów kierunku matematyka
obowiązujące w roku akademickim 2021-22

Omówienie zagadnienia powinno zawierać:

- (a) sformułowanie podstawowych definicji i twierdzeń, które go dotyczą,*
- (b) przykłady ilustrujące występujące pojęcia (pozytywne i negatywne),*
- (c) logiczne powiązania pomiędzy odpowiednimi pojęciami i twierdzeniami,*
- (d) ewentualne zastosowania zagadnienia w innych dziedzinach matematyki lub w innych dziedzinach wiedzy.*

Algebra (obowiązkowe)

1. Liczby zespolone. Wzór de Moivre'a. Zasadnicze twierdzenie algebry.
2. Działania na macierzach. Wyznacznik i rząd macierzy.
3. Układy równań liniowych. Wzory Cramera. Twierdzenie Kroneckera-Cappelięgo.
4. Przestrzeń i podprzestrzeń liniowa. Suma prosta i przekrój podprzestrzeni. Przestrzeń ilorazowa.
5. Liniowa niezależność wektorów. Powłoka liniowa. Baza i wymiar przestrzeni liniowej.
6. Przekształcenia liniowe. Jądro i obraz homomorfizmu. Monomorfizm i epimorfizm.
7. Macierz homomorfizmu. Wektory własne i wartości własne endomorfizmu. Wielomian charakterystyczny.
8. Iloczyn skalarny. Przestrzeń euklidesowa. Nierówność Cauchy'ego-Schwarza. Baza ortogonalna i ortonormalna.
9. Grupa. Podgrupa i dzielnik normalny. Warstwy i grupa ilorazowa.
10. Rząd grupy i elementu. Grupa cykliczna. Twierdzenie Lagrange'a.
11. Grupy permutacji. Rozkład permutacji na cykle i na transpozycje. Twierdzenie Cayleya.
12. Homomorfizm, monomorfizm, epimorfizm i izomorfizm grup. Twierdzenie o izomorfizmie.
13. Klasyfikacja grup cyklicznych. Twierdzenie o strukturze grup abelowych skończonych.
14. Pierścień, podpierścień i ideał. Elementy odwracalne i dzielniki zera. Pierścień ilorazowy.
15. Homomorfizm, monomorfizm, epimorfizm i izomorfizm pierścieni. Twierdzenie o izomorfizmie.
16. Ideał główny i dziedzina ideałów głównych. Elementy pierwsze i nierozkładalne. Dziedzina z jednoznacznością rozkładu.
17. Dziedzina euklidesowa. NWD, NWW i algorytm Euklidesa. Ideał pierwszy i maksymalny.
18. Ciało i podciało. Ciało proste. Charakterystyka ciała. Automorfizmy ciała.

Analiza matematyczna (obowiązkowe)

1. Ciąg liczbowy. Granica ciągu. Warunek konieczny zbieżności ciągu.
2. Ciąg monotoniczny. Granica ciągu monotonicznego.
3. Granica funkcji jednej zmiennej, definicja Cauchy'ego, definicja Heinego.
4. Ciągłość funkcji jednej zmiennej. Własności funkcji ciągłych na przedziale domkniętym.
5. Pochodna i różniczkowalność funkcji jednej zmiennej. Sens geometryczny pochodnej.
6. Monotoniczność i ekstrema funkcji jednej zmiennej. Warunek konieczny i warunek dostateczny istnienia ekstremum.
7. Twierdzenia o wartości średniej.
8. Całka oznaczona funkcji jednej zmiennej. Warunek konieczny całkowalności. Warunek dostateczny całkowalności.
9. Pierwotna funkcji jednej zmiennej, twierdzenie o istnieniu pierwotnej. Twierdzenie Newtona-Leibniza.
10. Szeregi liczbowe. Kryteria zbieżności. Zbieżność bezwzględna.
11. Szeregi funkcyjne. Zbieżność punktowa i jednostajna. Kryterium Cauchy'ego, kryterium Weierstrassa.
12. Szereg potęgowy. Promień i przedział zbieżności szeregu. Zbieżność bezwzględna i zbieżność jednostajna.
13. Przestrzeń metryczna. Zbieżność w przestrzeni metrycznej. Przestrzeń zupełna.
14. Funkcje wielu zmiennych. Granica funkcji wielu zmiennych. Ciągłość funkcji. Własności funkcji ciągłych na zbiorze domkniętym i ograniczonym.
15. Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych. Pochodne cząstkowe. Warunek konieczny i warunek dostateczny różniczkowalności.
16. Ekstrema funkcji wielu zmiennych. Warunek konieczny i warunek dostateczny istnienia ekstremum.
17. Ekstrema warunkowe. Metoda Lagrange'a.
18. Całka podwójna, całka potrójna. Całki iterowane, obliczanie całek podwójnych i potrójnych.
19. Krzywa w \mathbb{R}^2 , krzywa w \mathbb{R}^3 . Krzywe gładkie i kawałkami gładkie. Całka krzywoliniowa pierwszego rodzaju w \mathbb{R}^2 i w \mathbb{R}^3 . Całka krzywoliniowa drugiego rodzaju w \mathbb{R}^2 i w \mathbb{R}^3 .

Teoria liczb (do wyboru)

1. Podzielność liczb całkowitych. Dzielenie z resztą.
2. Największy wspólny dzielnik. Algorytm Euklidesa.
3. Liczby pierwsze: Twierdzenie Euklidesa, Zasadnicze twierdzenie arytmetyki.
4. Kongruencje. Twierdzenia Eulera, Fermata (małe) i Wilsona.
5. Rozwiązywanie kongruencji. Kongruencje liniowe. Chińskie twierdzenie o resztach.
6. Symbol Legendre'a. Prawa wzajemności dla reszt kwadratowych.
7. Sumy dwóch, trzech i czterech kwadratów liczb całkowitych. Problem Waringa.
8. Funkcje addytywne i multiplikatywne. Liczby doskonałe. Splot Dirichleta.
9. Równania diofantyczne. Elementarne metody rozwiązywania. Równania liniowe.
10. Ułamki łańcuchowe skończone i nieskończone.

Topologia (do wyboru)

1. Metryka, przestrzeń metryczna.
2. Zbiory otwarte i domknięte w przestrzeniach metrycznych. Domknięcie i wnętrze zbioru.
3. Zbieżność w przestrzeniach metrycznych. Warunek Cauchy'ego. Przestrzenie metryczne zupełne
4. Przestrzenie metryczne zwarte. Przestrzenie metryczne spójne.
5. Przekształcenia ciągłe przestrzeni metrycznych.
6. Topologia, przestrzeń topologiczna.

Wstęp do matematyki (do wyboru)

1. Klasyczny rachunek zdań. Tautologie.
2. Formy zdaniowe. Rachunek kwantyfikatorów.
3. Podstawowe i uogólnione działania na zbiorach.
4. Liczby naturalne - aksjomatyka Peano. Zasada indukcji matematycznej.
5. Relacja równoważności i zasada abstrakcji. Konstrukcja liczb całkowitych i wymiernych.
6. Funkcja jako relacja. Działania na funkcjach. Obraz i przeciwobraz zbioru.
7. Równoliczność zbiorów. Liczby kardynalne. Twierdzenie Cantora.
8. Zbiory przeliczalne i mocy continuum. Działania na zbiorach przeliczalnych.
9. Relacje porządkujące. Zbiory dobrze uporządkowane.

Rachunek prawdopodobieństwa (do wyboru)

1. Opis doświadczenia losowego. Przestrzeń zdarzeń elementarnych. Przykłady. Zdarzenia i relacje między zdarzeniami.
2. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa. Własności prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo klasyczne i geometryczne.
3. Prawdopodobieństwo warunkowe. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite i wzór Bayesa.
4. Niezależność zdarzeń i doświadczeń. Schemat Bernoulliego.
5. Zmienne losowe. Rozkład i dystrybuanta zmiennej losowej. Zmienne losowe typu skokowego i ciągłego. Przykłady.
6. Wartość oczekiwana, wariancja i odchylenie standardowe zmiennych losowych. Definicje i własności.
7. Rodzaje zbieżności ciągów zmiennych losowych.
8. Twierdzenia graniczne rachunku prawdopodobieństwa. Prawa wielkich liczb. Centralne twierdzenia graniczne.